УДК 517.925

# О РЕШЕНИЯХ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ В ПЛОСКОСТИ

**А.Т. Сазонова**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

# ON THE SOLUTIONS OF THE SIMPLIFIED SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE MOTION OF FOUR PARTICLES IN A PLANE

**A.T. Sazonova**

*Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus*

Рассматривается система, описывающая движение четырех частиц в плоскости. С помощью элементарных алгебраических преобразований установлены упрощенные системы, состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Для каждой упрощенной системы указаны наборы констант межчастичного взаимодействия, при которых общее решение является мероморфной функцией.

***Ключевые слова**: движение четырех тел, константа взаимодействия, свойство Пенлеве, мероморфная функция.*

A system describing the motion of four bodies under the action of gravity is considered. By elementary algebraic manipulations a simple system consisting of non-linear differential equations, each of which has a second order is selected. For each simplified system there are sets of constants of interparticle interaction, in which the general solution is meromorphic.

***Keywords**: movement of four bodies, constant interaction, Painlevé property, meromorphic function.*

### *Введение*

В последнее время значительный интерес представляет исследование следующей системы, состоящей из $N$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varsigma_n'' = 2\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{m=N} a_{nm}\frac{\varsigma_n'\varsigma_m'}{\varsigma_n-\varsigma_m},\ n=1,...,N.$$

Зависимые переменные $\varsigma_n = \varsigma_n(\tau)$ являются комплексными. Константы взаимодействия $a_{nm}$ априори произвольны, за исключением требования симметрии $a_{nm} = a_{mn}$.

Интерес к системе вызывает тот факт, что при отождествлении комплексной $\varsigma$-плоскости с физической плоскостью и при ограничении на вещественное $\tau$ (интерпретируемое как «физическое время») движение $N$ точек $\varsigma_n$ соответствует решению задачи многих тел в плоскости, характеризуемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством: среди решений задачи многих тел имеются много решений с полностью периодическими траекториями.

Несмотря на кажущуюся простоту уравнений, аналитического решения данной задачи в общем виде для $N > 3$ пока не найдено.

### *1 Постановка задачи*

В данной работе рассматривается задача о движении четырех частиц в плоскости.

Из исходной системы видно, что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\varsigma_1+\varsigma_2+\varsigma_3+\varsigma_4}{4},$$

движется равномерно:

$$Z'' = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau.$$

Положим

$$a_{12} = a_{21} = a,\quad a_{13} = a_{31} = c,\quad a_{14} = a_{41} = d,$$

$$a_{23} = a_{32} = b,\quad a_{24} = a_{42} = e,\quad a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует интеграл движения (что непосредственно следует из [1]):

$$K = \varsigma_1'\varsigma_2'\varsigma_3'\varsigma_4'(\varsigma_1-\varsigma_2)^{2a}(\varsigma_2-\varsigma_3)^{2b}(\varsigma_3-\varsigma_1)^{2c}\times$$

$$\times(\varsigma_4-\varsigma_1)^{2d}(\varsigma_2-\varsigma_4)^{2e}(\varsigma_3-\varsigma_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс

$$u_n = \varsigma_n - Z,\quad n = 1,2,3,4,$$

чтобы выполнялось

$$u_1+u_2+u_3+u_4 = 0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x,\quad u_2 = y,$$

$$u_3 = z,\quad u_4 = -x-y-z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения и интеграл движения в терминах переменных $x$, $y$, $z$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - \\ \quad -2d\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ \quad -2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ \quad -2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+y+2z}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)\times$$
$$\times(x-y)^{2a}(y-z)^{2b}(z-x)^{2c}\times$$
$$\times(2x+y+z)^{2d}(x+2y+z)^{2e}(x+y+2z)^{2f},$$

где $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t = \tau - \tau_0,$

$$V = Z'(0), \quad K = const.$$

### *2 Решения упрощенных систем в задаче движения четырех частиц в плоскости*

Легко проверить, что система

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2d\dfrac{\dot{x}^2}{2x}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ \quad -2e\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ \quad -2f\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} \end{cases} \tag{2.1}$$

является инвариантной при замене переменных $(t,x,y,z;\varepsilon t,x,\varepsilon y,\varepsilon z)$, где $\varepsilon$ –параметр, а значит, является упрощенной для (1.1).

Рассмотрим первое уравнение системы (2.1):

$$\ddot{x} = -2d\frac{\dot{x}^2}{x}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что дифференциальное уравнение второго порядка (2.2) имеет общее решение вида $x = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{d+1}}$, если $d \neq -1$, и общее решение вида $x = C_1 e^{C_2 t}$, если $d = -1$, где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные, $t = \tau - \tau_0$.

Рассмотрим первое и второе уравнения системы (2.1):

$$\begin{cases} \ddot{y} = -2(a+e)\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}, \\ \ddot{z} = -2(c+f)\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Заметим сначала, что согласно [1] справедлива

***Лемма 2.1.*** *Для того, чтобы все решения* (1.1) *являлись мероморфными функциями от* $\tau$, *необходимо, чтобы все показатели* $\gamma_n, \beta_n, \Gamma$, $n = \overline{1,6}$, *определяемые через константы* $a,b,c,d,e,f$ *с помощью соотношений*

$$\gamma_n = \frac{1}{1+a_n},$$
$$\beta_n = -2a_n,$$
$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$
$$a_n \in \{a,b,c,d,e,f\},$$

*принимали целочисленные или бесконечные значения.*

Положим $b$=0, тогда система (2.3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{y} = -2(a+e)\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x}, \\ \ddot{z} = -2(c+f)\dfrac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Разделим первое уравнение системы (2.4) на $\dot{y}+V$, а второе на $\dot{z}+V$:

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{y}}{\dot{y}+V} = -2(a+e)\dfrac{\dot{x}}{x}, \\ \dfrac{\ddot{z}}{\dot{z}+V} = -2(c+f)\dfrac{\dot{x}}{x}. \end{cases}$$

Интегрируя каждое уравнение последней системы, будем иметь

$$\begin{cases} \dot{y}+V = C_4 x^{-2(a+e)}, \\ \dot{z}+V = C_3 x^{-2(c+f)}. \end{cases}$$

Таким образом, получим, что справедлива

***Лемма 2.2.*** *Система* (2.4) *имеет общее решение вида*

$$y = \frac{C_4}{C_1}\frac{d+1}{-2(a+e)+d+1}(C_1 t + C_2)^{\frac{-2(a+e)+d+1}{d+1}} - Vt + C_5,$$
$$z = \frac{C_3}{C_1}\frac{d+1}{-2(c+f)+d+1}(C_1 t + C_2)^{\frac{-2(c+f)+d+1}{d+1}} - Vt + C_6,$$

*если* $d \neq -1$, *и*

$$y = \frac{C_1 C_4}{-2C_2(a+e)}e^{-2C_2(a+e)t} - Vt + C_5,$$
$$z = \frac{C_1 C_3}{-2C_2(c+f)}e^{-2C_2(c+f)t} - Vt + C_6,$$

*если* $d = -1$, *где* $t = \tau - \tau_0, \tau_0$, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ *– произвольные постоянные.*

А значит, верна

***Теорема 2.1.*** *Если* $b = 0$, *то для наличия у системы* (2.1) *свойства Пенлеве достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\Gamma = \dfrac{2}{2+a+c+d+e+f}$, *Γ – целочисленное или бесконечное*;

2) $a,c,d,e,f \in \left\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0\right\}$.

При замене переменных $(t,x,y,z;\ \varepsilon t,\varepsilon x,\ y,\ \varepsilon z)$, где $\varepsilon$ −параметр, для системы (1.1) получим упрощенную систему вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}, \\ \ddot{y} = -e\dfrac{\dot{y}^2}{y}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2(b+f)\dfrac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y}. \end{cases} \tag{2.5}$$

***Теорема 2.2.*** *Если $c=0$ и $d=a+b+f$, то для наличия у системы* (2.5) *свойства Пенлеве достаточно*

1) $d \neq a-b-f$;

2) $\Gamma = \dfrac{2}{2+2a+2b+2f+e}$, *$\Gamma$ − целочисленное или бесконечное*;

3) $a,b,d,e,f \in \left\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0\right\}$.

*Доказательство.*

Легко проверить, что второе уравнение системы (2.5) имеет общее решение

$$y = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{e+1}}, \tag{2.6}$$

при $e \neq -1$ и

$$y = C_1 e^{C_2 t}$$

при $e=-1$, где $C_1, C_2$ − произвольные постоянные, $t = \tau - \tau_0$.

Рассмотрим первое и третье уравнения системы (2.5)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2(b+f)\dfrac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Прибавим первое уравнение системы (2.7) ко второму:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z}, \\ \ddot{x}+\ddot{z} = 2(a-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y} - 2(b+f)\dfrac{(\dot{z}+V)\dot{y}}{y}. \end{cases}$$

Пусть $c=0,\ a-d=-(b+f)$, откуда

$$d = a+b+f,$$

последняя система примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(a-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{y}}{y}, \\ \ddot{x}+\ddot{z} = -2(b+f)\dfrac{(\dot{x}+\dot{z}+2V)\dot{y}}{y}. \end{cases}$$

С помощью несложных преобразований будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}+V} = 2(a-d)\dfrac{\dot{y}}{y}, \\ \dfrac{\ddot{x}+\ddot{z}}{\dot{x}+\dot{z}+2V} = -2(b+f)\dfrac{\dot{y}}{y}. \end{cases}$$

Дифференцирование каждого уравнения последней системы дает

$$\begin{cases} \dot{x}+V = \tilde{C}_3 y^{2(a-d)}, \\ \dot{x}+\dot{z}+2V = \tilde{C}_4 y^{-2(b+f)}. \end{cases}$$

Теперь с учетом равенства (2.6) будем иметь

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{C}_3 (C_1 t + C_2)^{\frac{2(a-d)}{e+1}} - V, \\ \dot{z} = (\tilde{C}_4 - \tilde{C}_3)(C_1 t + C_2)^{\frac{-2(b+f)}{e+1}} - V. \end{cases}$$

Продифференцируем оба уравнения системы

$$\begin{cases} x = \dfrac{\tilde{C}_3}{C_1}\dfrac{e+1}{2a-2d+e+1}\times \\ \quad \times (C_1 t + C_2)^{\frac{2a-2d+e+1}{e+1}} - Vt + C_5, \\ z = \dfrac{\tilde{C}_4-\tilde{C}_3}{C_1}\dfrac{e+1}{-2b-2f+e+1}\times \\ \quad \times (C_1 t + C_2)^{\frac{-2b-2f+e+1}{e+1}} - Vt + C_6, \end{cases}$$

причем $2a-2d+e+1 \neq 0$ и $-2b-2f+e+1 \neq 0$, откуда находим, что $d \neq a-b-f$.

Таким образом, при

$$c=0,\ e\neq -1,\ d \neq a-b-f,\ d = a+b+f$$

система (2.5) имеет общее решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{\tilde{C}_3}{C_1}\dfrac{e+1}{2a-2d+e+1}\times \\ \quad \times (C_1 t + C_2)^{\frac{2a-2d+e+1}{e+1}} - Vt + C_5, \\ y = (C_1 t + C_2)^{\frac{1}{e+1}}, \\ z = \dfrac{\tilde{C}_4-\tilde{C}_3}{C_1}\dfrac{e+1}{-2b-2f+e+1}\times \\ \quad \times (C_1 t + C_2)^{\frac{-2b-2f+e+1}{e+1}} - Vt + C_6, \end{cases}$$

где $t=\tau-\tau_0, \tau_0, C_1, C_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, C_5, C_6$ − произвольные постоянные.

Аналогично для решения

$$y = C_1 e^{C_2 t}$$

при $e=-1$ находим, что система (2.6) имеет общее решение

$$x = \frac{\tilde{C}_3 C_1}{2C_2(a-d)} e^{2C_2(a-d)t} - Vt + C_5,$$

$$y = C_1 e^{C_2 t},$$

$$z = \frac{(\tilde{C}_4-\tilde{C}_3)C_1}{-2C_2(b+f)} e^{-2C_2(b+f)t} - Vt + C_6,$$

где $t=\tau-\tau_0, \tau_0, C_1, C_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4, C_5, C_6$ − произвольные постоянные.

Согласно лемме 2.1, а также с учетом соотношений $c = 0, d = a + b + f$ непосредственно заключаем о справедливости второго и третьего условий теоремы.

Таким образом, теорема 2.2 доказана.

На основании теоремы 2.2 запишем наборы значений констант взаимодействия в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Наборы значений констант межчастичного взаимодействия

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| –0,5 | –0,5 | 0 | –1,5 | –1,5 | –0,5 |
| –0,5 | –0,5 | 0 | –1,5 | –0,5 | –0,5 |
| –0,5 | –0,5 | 0 | –1,5 | 0 | –0,5 |
| –0,5 | –0,5 | 0 | –1 | –1,5 | 0 |
| –0,5 | –0,5 | 0 | –1 | –0,5 | 0 |
| –0,5 | –0,5 | 0 | –1 | 0 | 0 |
| –1 | –0,5 | 0 | –1,5 | –1,5 | 0 |
| –0,5 | –1 | 0 | –1,5 | –1,5 | 0 |
| 0 | –1 | 0 | –1,5 | –1,5 | –0,5 |
| 0 | –0,5 | 0 | –1,5 | –1,5 | –1 |
| 0 | –1,5 | 0 | –1,5 | –1,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –1,5 | –1,5 | –1,5 |
| –1 | –0,5 | 0 | –1,5 | –0,5 | 0 |
| –0,5 | –1 | 0 | –1,5 | –0,5 | 0 |
| 0 | –1 | 0 | –1,5 | –0,5 | –0,5 |
| 0 | –0,5 | 0 | –1,5 | –0,5 | –1 |
| 0 | –1,5 | 0 | –1,5 | –0,5 | 0 |
| 0 | –1,5 | 0 | –1,5 | –0,5 | 0 |
| –1 | –0,5 | 0 | –1,5 | 0 | 0 |
| –0,5 | –1 | 0 | –1,5 | 0 | 0 |
| 0 | –1 | 0 | –1,5 | 0 | –0,5 |
| 0 | –0,5 | 0 | –1,5 | 0 | –1 |
| 0 | –1,5 | 0 | –1,5 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –1,5 | 0 | –1,5 |
| 0 | –1,5 | 0 | –1 | –1,5 | –0,5 |
| –0,5 | 0 | 0 | –1 | –1,5 | –0,5 |
| 0 | –1 | 0 | –1 | –1,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –1 | –1,5 | –1 |
| 0 | –0,5 | 0 | –1 | –0,5 | –0,5 |
| –0,5 | 0 | 0 | –1 | –0,5 | –0,5 |
| 0 | –1 | 0 | –1 | –0,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –1 | –0,5 | –1 |
| 0 | –0,5 | 0 | –1 | 0 | –0,5 |
| –0,5 | 0 | 0 | –1 | 0 | –0,5 |
| 0 | –1 | 0 | –1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –1 | 0 | –1 |
| 0 | –0,5 | 0 | –0,5 | –1,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –0,5 | –1,5 | –0,5 |
| 0 | –0,5 | 0 | –0,5 | –0,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –0,5 | –0,5 | –0,5 |
| 0 | –0,5 | 0 | –0,5 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | –0,5 | 0 | –0,5 |

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z} - \\ \qquad - 2d\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z} - \\ \qquad - 2e\dfrac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{z} = -f\dfrac{\dot{z}^2}{z}, \end{cases} \tag{2.8}$$

которая является инвариантной для системы (1.1) при замене переменных $(t, x, y, z; \varepsilon t, \varepsilon x, \varepsilon y, z)$, где $\varepsilon$ – параметр.

Легко проверить, что третье уравнение системы (2.8)

$$\ddot{z} = -f\frac{\dot{z}^2}{z}$$

имеет общее решение

$$z = (D_1 t + D_2)^{\frac{1}{f+1}},$$

при $f \neq -1$ и

$$z = D_1 e^{D_2 t}$$

при $f = -1$, где $D_1, D_2$ – произвольные постоянные, $t = \tau - \tau_0$.

Рассмотрим первые два уравнения системы (2.8)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2(c-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2(b-e)\dfrac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Положим $a = 0$, тогда система (2.9) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2(c-d)\dfrac{(\dot{x}+V)\dot{z}}{z}, \\ \ddot{y} = 2(b-e)\dfrac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z}. \end{cases} \tag{2.10}$$

После несложных преобразований будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}+V} = 2(c-d)\dfrac{\dot{z}}{z}, \\ \dfrac{\ddot{y}}{\dot{y}+V} = 2(b-e)\dfrac{\dot{z}}{z}. \end{cases}$$

Интегрирование каждого уравнения последней системы дает

$$\begin{cases} \dot{x} + V = D_3 z^{2(c-d)}, \\ \dot{y} + V = D_4 z^{2(b-c)} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = D_3 (D_1 t + D_2)^{\frac{2(c-d)}{f+1}} - V, \\ \dot{y} = D_4 (D_1 t + D_2)^{\frac{2(b-c)}{f+1}} - V. \end{cases}$$

Таким образом, справедлива

***Лемма* 2.3.** *Система* (2.10) *имеет общее решение вида*

$$x=\frac{D_3}{D_1}\frac{f+1}{2c-2d+f+1}(D_1t+D_2)^{\frac{2c-2d+f+1}{f+1}}-Vt+D_5,$$

$$y=\frac{D_4}{D_1}\frac{f+1}{2b-2c+f+1}(D_1t+D_2)^{\frac{2b-2c+f+1}{f+1}}-Vt+D_6,$$

*если* $f\neq-1$, *и*

$$x=\frac{D_1D_3}{2D_2(c-d)}e^{2D_2(c-d)t}-Vt+D_5,$$

$$y=\frac{D_1D_4}{2D_2(b-c)}e^{2D_2(b-c)t}-Vt+D_6,$$

*если* $f=-1$, *где* $t=\tau-\tau_0,\tau_0,D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6$ − *произвольные постоянные*,

$$c\neq\frac{d+b}{2},\quad 2c-2d+f+1\neq 0.$$

А значит, верна

***Теорема* 2.3.** *Если* $a=0$, *то для наличия у системы* (2.8) *свойства Пенлеве достаточно выполнения следующих условий:*

1) $c\neq\dfrac{d+b}{2}$,

2) $2c-2d+f+1\neq 0$,

3) $\Gamma=\dfrac{2}{2+b+c+d+e+f}$,

$b,c,d,e,f\in\left\{-\frac{3}{2};-1;-\frac{1}{2};0\right\}$, *Г – целочисленное или бесконечное.*

Таким образом, заключаем, что система (2.8) при условиях, описанных с помощью теоремы 2.3, имеет общее решение вида:

$$x=\frac{D_3}{D_1}\frac{f+1}{2c-2d+f+1}(D_1t+D_2)^{\frac{2c-2d+f+1}{f+1}}-Vt+D_5,$$

$$y=\frac{D_4}{D_1}\frac{f+1}{2b-2c+f+1}(D_1t+D_2)^{\frac{2b-2c+f+1}{f+1}}-Vt+D_{6,}$$

$$z=(D_1t+D_2)^{\frac{1}{f+1}},$$

*если* $f\neq-1$, *и*

$$x=\frac{D_1D_3}{2D_2(c-d)}e^{2D_2(c-d)t}-Vt+D_5,$$

$$y=\frac{D_1D_4}{2D_2(b-c)}e^{2D_2(b-c)t}-Vt+D_6,$$

$$z=D_1e^{D_2t},$$

если $f=-1$, где $t=\tau-\tau_0,\tau_0,D_1,D_2,D_3,D_4,D_5,D_6$ – произвольные постоянные.

***Заключение***

Рассмотрена система, описывающая движение четырех тел под действием сил гравитации, для которой с помощью различных вариаций метода малого параметра получены упрошенные системы (2.1), (2.5), (2.8), состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок.

Исследования каждой упрощенной системы дают достаточные условия наличия мероморфных решений. На основании данных условий записаны наборы констант межчастичного взаимодействия, представленные в виде таблицы 2.1.

Показано, что при найденных наборах значений констант межчастичного взаимодействия в задаче четырех тел в плоскости компоненты общего решения системы являются полиномами по *t*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоджеро*, *Ф.* Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве / Ф. Калоджеро. − 2-е изд. − Москва : Наука, 2002. – Т. 133 : Теоретическая и математическая физика. – 149 с.

2. *Лозовская*, *А.Т.* Тест Пенлеве для некоторых систем дифференциальных уравнений, связанных с задачей трех тел / А.Т. Лозовская // Наука–2009 : сб. ст. аспирантов и магистрантов ГрГУ / ГрГУ им. Я. Купалы ; отв.ред. А.Ф. Проневич. – Гродно : ГрГУ, 2009. − С. 48–52.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований* (*грант* № Ф14М–148).

*Поступила в редакцию 28.05.14.*